

文章编号: 1001-246X(2012)06-0823-05

低渗透多孔介质非达西渗流动边界界面追踪

刘文超, 姚 军, 王建忠

(中国石油大学(华东)石油工程学院, 山东 青岛 266580)

摘 要: 基于低渗透多孔介质非达西不稳定渗流的动边界数学模型, 推导动边界移动速度的微分表达式, 揭示动边界移动速度与动边界上地层压力关于径向距离的二次导数成正比; 由此利用拉格朗日三点插值公式求得动边界附近控制方程的有限差分格式, 并对下一时刻动边界的精确位置进行追踪. 有限差分方法的数值结果表明界面追踪法可较好地反映低渗透多孔介质非达西不稳定渗流动边界的移动规律.

关键词: 低渗透多孔介质; 界面追踪法; 非达西渗流; 启动压力梯度; 有限差分法

中图分类号: TE312, TE319 **文献标识码:** A

0 引言

低渗透多孔介质非达西不稳定渗流动边界模型^[1-7]是强非线性的, 其精确解析解难以求出. 目前, 该动边界模型的主要研究方法包括积分近似解析法^[1-3]、无网格数值方法^[4-5]和稳态逐次逼近法^[6-7]. 本文推导非达西渗流模型动边界移动速度的微分表达式(非 Stefan 动边界条件), 将传热学中处理 Stefan 动边界问题的界面追踪方法^[8]引入到低渗透多孔介质非达西不稳定渗流动边界的模型求解中, 利用有限差分方法求得非达西渗流瞬时刻动边界的数值解.

本文研究内容适用于低渗透油藏非达西渗流、稠油油藏非牛顿流体渗流以及化学驱三次采油过程中聚合物非牛顿流体渗流等由于存在地层启动压力梯度或流体的屈服应力而产生的动边界数学物理问题的数值求解, 为非常规油藏开发中的试井和数值模拟技术提供一定的理论基础.

1 数学模型

考虑圆柱形低渗透油层中心一口完善井定产量生产的情况, 非达西不稳定渗流模型的假设条件如下^[1-7]:

- 1) 油层均质、各向同性、等温, 且顶、底封闭;
- 2) 渗流属于单相水平径向流动, 并忽略重力影响;
- 3) 地层流体和地层岩石是微可压缩的;
- 4) 低渗透多孔介质的非达西运动方程为^[7, 9-11]:

$$v = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{dp}{dr} \leq \lambda, \\ -\frac{k}{\mu} \left(\frac{dp}{dr} - \lambda \right), & \frac{dp}{dr} > \lambda, \end{cases} \quad (1)$$

式中 k 为储层渗透率, 单位: mD; μ 为流体粘度, 单位: mPa·s; p 为地层压力, 单位: MPa; r 为径向距离, 单位: m; v 为渗流速度, 单位: m·d⁻¹; λ 为启动压力梯度, 单位: MPa·m⁻¹;

低渗透多孔介质不稳定径向渗流的无因次连续性方程可表示为^[1-5]

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial P_D}{\partial r_D} + \frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2} + \frac{\lambda_D}{r_D} = \frac{\partial P_D(r_D, t_D)}{\partial t_D}. \quad (2)$$

收稿日期: 2012-02-20; 修回日期: 2012-06-04

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)(2006CB202404)与高等学校学科创新引智计划(“111 计划”)联合资助项目

作者简介: 刘文超(1984-), 男, 山东寿光, 博士生, 主要从事低渗透油藏非线性渗流数值模拟研究, E-mail: wcliu_2008@126.com

初始条件

$$P_D|_{t_D=0} = 0. \quad (3)$$

定产量的内边界条件为

$$r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -(1 + \lambda_D). \quad (4)$$

动边界条件包含

$$\frac{\partial P_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=\delta(t_D)} = -\lambda_D, \quad (5)$$

$$P_D|_{r_D=\delta(t_D)} = 0. \quad (6)$$

上述无因次变量定义为

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \quad t_D = \frac{3.6 \times 10^{-3} kt}{\phi_i C_i \mu r_w^2}, \quad \lambda_D = \frac{khr_w \lambda}{1.842 \mu q B}, \quad P_D(r_D, t_D) = \frac{kh[p_i - p(r, t)]}{1.842 q \mu B},$$

式中 C_i 为综合压缩系数, 单位: MPa^{-1} ; ϕ_i 为初始孔隙度, 小数; t 为时间, 单位: h; p_i 为原始地层压力, 单位: MPa; r_w 为井筒半径, 单位: m; B 为原油体积系数, 单位: $\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$; q 为油井产量, 单位: $\text{m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$; h 为油层厚度, 单位: m; δ 为动边界移动的径向距离, 无因次; r_D 为无因次径向距离; t_D 为无因次时间; λ_D 为无因次启动压力梯度; P_D 为无因次地层压力.

2 动边界移动速度

由式(6), 动边界上的无因次压力满足

$$P_D(\delta(t_D), t_D) = 0, \quad (7)$$

将上式的左右两边关于无因次时间进行求导, 得

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D} \Big|_{r_D=\delta(t_D)} + \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=\delta(t_D)} \frac{\partial \delta}{\partial t_D} = 0. \quad (8)$$

将式(5)代入上式(8), 可得

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D} \Big|_{r_D=\delta(t_D)} = \lambda_D \frac{\partial \delta}{\partial t_D}. \quad (9)$$

而由控制方程式(2), 两边取 $r_D = \delta(t_D)$, 可得

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D} \Big|_{r_D=\delta(t_D)} = \frac{1}{\delta(t_D)} \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=\delta(t_D)} + \frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2} \Big|_{r_D=\delta(t_D)} + \frac{\lambda_D}{\delta(t_D)}, \quad (10)$$

由式(5), 式(10)简化为

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D} \Big|_{r_D=\delta(t_D)} = \frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2} \Big|_{r_D=\delta(t_D)}, \quad (11)$$

将式(11)代入式(9), 可求得动边界移动速度的表达式为

$$\lambda_D \frac{\partial \delta}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2} \Big|_{r_D=\delta(t_D)}. \quad (12)$$

从式(12)可以看出, 低渗透多孔介质低速非达西渗流动边界移动速度与动边界上无因次地层压力关于无因次径向距离的二次导数成正比, 这与传热学中经典 Stefan 问题^[8]的动边界条件是不同的.

3 界面追踪法求解数学模型

做变换 $x = \ln(r_D)$, 则式(2) ~ (4)、式(6)和式(12)可变为

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial x^2} + e^x \lambda_D = e^{2x} \frac{\partial P_D(x, t_D)}{\partial t_D}, \quad (13)$$

$$P_D(x, t_D) \Big|_{t_D=0} = 0, \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial P_D}{\partial x} \right|_{x=0} = - (1 + \lambda_D) , \tag{15}$$

$$P_D|_{x=\xi} = 0 , \tag{16}$$

$$\lambda_D e^{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t_D} = \frac{\lambda_D}{e^{\xi}} + \frac{1}{e^{2\xi}} \left. \frac{\partial^2 P_D}{\partial x^2} \right|_{x=\xi} , \tag{17}$$

其中, $\xi = \ln \delta$.

3.1 拉格朗日三点插值公式

假定 x_0, x_1, x_2 三点上的函数值为: $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$; 则函数 $f(x)$ 利用拉格朗日插值函数可表示为^[8, 12].

$$f(x) = \sum_{k=0}^2 l_k(x) f(x_k) , \tag{18}$$

其中, $l_k(x)$ 为拉格朗日插值函数, 有^[8, 12]

$$l_k(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^2 \frac{(x - x_m)}{(x_k - x_m)} . \tag{19}$$

利用式(19), 式(18)中 $f(x)$ 的二阶导数

$$f^{(2)}(x) = 2 \left(\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \right) . \tag{20}$$

3.2 界面追踪有限差格式

图 1 为采用固定格点下, 第 $j \Delta t$ 时刻动边界位置 (图中虚线处); 可以看出, 动边界 ξ 位于 $i \Delta x$ 和 $(i+1) \Delta x$ 两格点之间的 $(i + \omega^j) \Delta x$ 处; ω^j 为表征 $j \Delta t$ 时刻动边界精确位置的分.

对于 $0 \leq n < i$, 无因次地层压力二阶导数均采用显式中心差商, 控制方程式(13)的差格式为

$$\frac{P_{Dn-1}^j - 2P_{Dn}^j + P_{Dn+1}^j}{(\Delta x)^2} + e^{i\Delta x} \lambda_D = e^{2i\Delta x} \frac{P_{Dn}^{j+1} - P_{Dn}^j}{\Delta t} . \tag{21}$$

当 $n = i$ 时, 由于动边界的存在, 式(21)形式的差分格式不再适用, 可利用二阶导数的拉格朗日插值表达式即式(20)推导其差分格式. 第 $j \Delta t$ 时刻, 动边界附近的三个数据点分别为, $((i-1)\Delta x, P_{Di-1}^j), (i\Delta x, P_{Di}^j), (\xi^j, 0)$; 其中, 动边界径向距离 $\xi^j = (i + \omega^j) \Delta x$; 于是, 由式(20), 可求得 $n = i$ 处, 无因次地层压力二阶导数的差格式为

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial x^2} = \frac{2}{(\Delta x)^2} \left(\frac{P_{Di-1}^j}{\omega^j + 1} + \frac{P_{Di}^j}{\omega^j} \right) . \tag{22}$$

于是, 动边界附近控制方程的差格式可表示为

$$\frac{2}{(\Delta x)^2} \left(\frac{P_{Di-1}^j}{\omega^j + 1} + \frac{P_{Di}^j}{\omega^j} \right) + e^{i\Delta x} \lambda_D = e^{2i\Delta x} \frac{P_{Di}^{j+1} - P_{Di}^j}{\Delta t} . \tag{23}$$

同样, 利用式(22), 将式(17)进行差分后, 可得

$$\lambda_D e^{\xi^j} \frac{(\omega^{j+1} - \omega^j) \Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda_D}{e^{\xi^j}} + \frac{2}{e^{2\xi^j} (\Delta x)^2} \left(\frac{P_{Di-1}^j}{\omega^j + 1} + \frac{P_{Di}^j}{\omega^j} \right) . \tag{24}$$

由上式, 可求出 ω^{j+1} , 即确定了第 $(j+1) \Delta t$ 时刻动边界所处的精确位置.

3.3 程序算法

1) 初始化

由式(14), 初始时刻 $j = 0$ 时的无因次地层压力为

$$P_{D0}^0 = 0 . \tag{25}$$

假定左侧存在一虚拟格点 (图 2 所示), 标号为 -1, 压力导数采用向后差商, 则内边界条件即式(15)的差分格

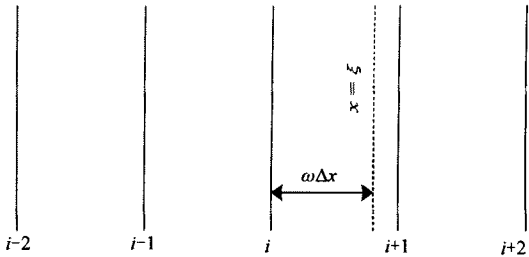


图 1 动边界处格点示意图

Fig. 1 Schematic of grids near a moving boundary

式为

$$\frac{P_{D-1}^j - P_{D0}^j}{\Delta x} = 1 + \lambda_D, \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

由式(25)和式(26),初始时刻 $j=0$ 时,

$$P_{D-1}^0 = (1 + \lambda_D) \Delta x. \quad (27)$$

假设初始时刻动边界所处的距离为 $\omega^0 = \varepsilon$,且 ε 很小几乎为零. $i=0, n=0$ 时,式(23)和式(24)有

$$\frac{2}{(\Delta x)^2} \left(\frac{P_{D-1}^0}{\varepsilon + 1} + \frac{P_{D0}^0}{\varepsilon} \right) + \lambda_D = \frac{P_{D0}^1 - P_{D0}^0}{\Delta t}, \quad (28)$$

$$\lambda_D e^\varepsilon \frac{(\omega^1 - \varepsilon) \Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda_D}{e^\varepsilon} + \frac{2}{e^{2\varepsilon} (\Delta x)^2} \left(\frac{P_{D-1}^0}{\varepsilon + 1} + \frac{P_{D0}^0}{\varepsilon} \right). \quad (29)$$

将式(25)、(27)及 $e^\varepsilon \approx 1.0$ 与 $e^{2\varepsilon} \approx 1.0$ 代入式(28)和(29),可分别求得 Δt 时刻的无因次地层压力

$$P_{D0}^1 = \frac{2\Delta t}{\Delta x} (1 + \lambda_D) + \lambda_D \Delta t, \quad (30)$$

$$\omega^1 = \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{(1 + \lambda_D)}{\lambda_D}. \quad (31)$$

再利用式(26),可得

$$P_{D-1}^1 = \frac{2\Delta t}{\Delta x} (1 + \lambda_D) + \lambda_D \Delta t + (1 + \lambda_D) \Delta x. \quad (32)$$

若 $\omega^1 \leq 1.0$,则将已求出的 P_{D0}^1 、 ω^1 和 P_{D-1}^1 代入式(23)、(24)和(26),计算下一时间步的 P_{D0}^2 、 ω^2 和 P_{D-1}^2 ;循环至 $\omega^j > 1.0$;

2) 利用拉格朗日插值公式即式(18)和(19),可求得

$$P_{Di+1}^j = -\frac{\omega^j - 1}{\omega^j + 1} P_{Di-1}^j + \frac{2(\omega^j - 1)}{\omega^j} P_{Di}^j, \quad (33)$$

再令: $i=i+1, \omega^j = \omega^j - 1.0$;可通过适当缩短时间步长和增加空间步长,使得 $\omega^j \leq 1.0$;

3) 利用已求出的 $P_{Dn}^j (n = -1, \dots, i)$ 和 ω^j 代入式(21)、(23)、(24)和(26)计算下一时间步的 $P_{Dn}^{j+1} (n = -1, \dots, i)$ 和 ω^{j+1} ;循环至 $\omega^{j*} > 1.0; j=j^*,$ 转2)。

4 数值结果

利用 VC++ 编制数值计算程序,可分别求得 $\lambda_D = 0.002, 0.005, 0.007, 0.009$ 时对应的动边界瞬时变化数据,并将数值结果绘制动边界的瞬时变化曲线图,如图3所示。从图3可以看出,无因次启动压力梯度越大,任意时刻动边界的距离越小,动边界的移动速度也越慢;而且无因次启动压力梯度越小,无因次启动压力梯度对动边界的影响越敏感。这与积分近似法^[1-3]、无网格方法^[4-5]和稳态逐次逼近法^[6-7]得出的动边界移动规律保持一致。因此,本文利用界面追踪法求解关于低渗透多孔介质非达西渗流的动边界问题,可以较好的反映动边界的移动规律,而且程序算法相对简单,方便于工程计算。

5 结论

1) 推导了低渗透多孔介质非达西不稳定渗流动边界移动速度的微分表达式,不同于传热学中的 Stefan 动边界条件;传热学中处理 Stefan 动边界问题的界面追踪法可应用于求解低渗透多孔介质非达西渗流的非

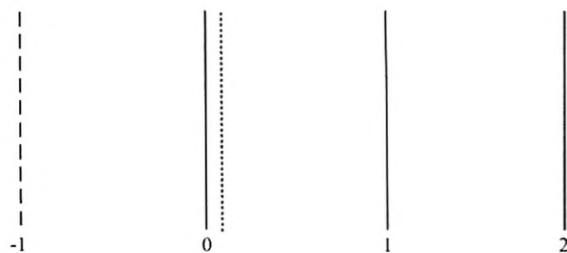


图2 井附近格点分布示意图

Fig.2 Schematic of grids near well

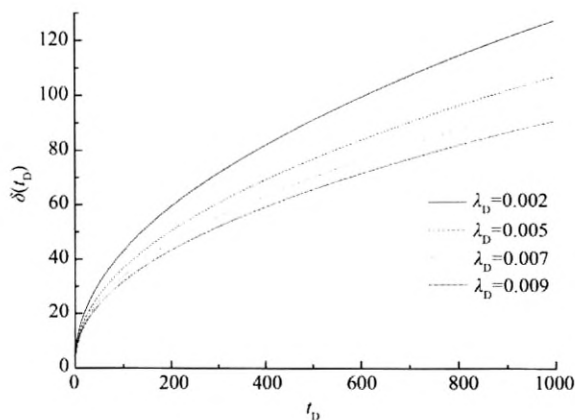


图3 动边界瞬时变化曲线

Fig.3 Transient moving boundaries

Stefan 动边界问题.

2) 利用拉格朗日三点插值公式求得动边界附近控制方程的差分格式,并对非达西渗流动边界的界面进行追踪,求得下一时刻动边界的精确位置.

3) 程序算法简单,计算效率高;可通过适当缩短时间步长和增加空间步长进一步提高计算精度和数值稳定性.数值结果表明界面追踪法能正确反映低渗透多孔介质非达西不稳定渗流动边界的移动规律.

参 考 文 献

- [1] Cheng Shiqing, Zhang Zongsheng, Huang Yanzhang, et al. An integral solution of free-boundary problem of non-Darcy flow behavior[J]. Mechanics and Engineering, 2002, 24(3): 15-17.
- [2] Wu Y S, Pruess K, Witherspoon P A. Flow and displacement of Bingham non-Newtonian fluids in porous media[J]. SPE Reservoir Engineering, 1992, 7(3): 369-376.
- [3] Zhu Chunsheng, Cheng Linsong, Zhang Shujuan. Approximate solution for non-steady flow in low permeability reservoir[J]. Journal of Southwest Petroleum University (Science&Technology), 2008, 30(4): 69-72.
- [4] Guo Yongcun, Zeng Qinghong, Wang Zhongxun. Numerical simulation of low permeability flow with moving-boundary using meshless methods [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(11): 188-192.
- [5] Zeng Qinghong, Lu Detang. Porous flow related to start-up pressure gradient and its solution with meshless methods[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2005, 22(4): 443-446.
- [6] Ji Bingyu, He Yingfu. Formation pressure distribution of a single well based on low-velocity non-Darcy flow[J]. Acta Petrolei Sinica, 2011, 32(3): 466-469.
- [7] Li Aifen, Liu Yanxia, Zhang Huaqiang, et al. Determination of reasonable spacing in low permeability porous media by means of series of steady state analysis[J]. Journal of China University of Petroleum, 2011, 35(1): 89-97.
- [8] Crank J. Free and moving boundary problems[M]. Oxford: Clarendon Press, 1984: 164-186.
- [9] Yao Jun, Liu Shun. Well test interpretation model based on mutative permeability effects for low-permeability reservoir[J]. Acta Petrolei Sinica, 2009, 30(3): 430-433.
- [10] Ma Xiaodan, Tong Dengke, Ma Huawei. Non-Darcy flow analysis of fluid in deformed fractal reservoir with double porosity [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2007, 24(2): 198-202.
- [11] Lian Peiqing, Cheng Linsong, Cao Renyi, et al. A coupling model of low permeability reservoir and fractured horizontal wellbore in nonsteady state[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2010, 27(2): 203-210.
- [12] Burden R L, Faires J D. Numerical analysis[M]. 8th ed. USA: Thomson Higher Education, 2005: 101-118.

Front Tracking for Moving Boundary of Non-Darcy Seepage Flows in Low-permeability Porous Media

LIU Wenchao, YAO Jun, WANG Jianzhong

(School of Petroleum Engineering, China University of Petroleum, Qingdao 266580, China)

Abstract: Based on a mathematical model of non-Darcy unsteady seepage flows in low-permeability porous media with moving boundary conditions, a differential equation of propagation velocity for moving boundary was deduced. It indicates that propagation velocity of a moving boundary is proportional to the second derivative of formation pressure with respect to radial distance on the moving boundary. And with Lagrange three-point interpolation formula, finite difference scheme of governing equation near a moving boundary was obtained. Exact position of a moving boundary is able to be tracked. Numerical results show that the front tracking method describes propagation behaviors of moving boundary of non-Darcy unsteady seepage flows in low-permeability porous media well.

Key words: low-permeability porous media; front tracking method; non-Darcy seepage flow; threshold pressure gradient; finite difference method